MATEMATICA

Prova di verifica del profilo di uscita e/o dei livelli minimi relativi alle classi 3 dell'internazionale Francese-Tedesco ad indirizzo scientifico ed I.G.C.S.E.

Durata della prova 2,5 ore

Entro parentesi quadra il punteggio massimo assegnato ad ogni esercizio.

Il punteggio di 6/10 indica il raggiungimento dei livelli minimi.

1. **[1]** Determinare il segno ed il dominio della seguente funzione:

   a) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}-x+1}{|x^2-9|}$

2. **[2]** Data la seguente equazione $(2+k)x - y - 2k + 3 = 0, \quad k \in R$ determinare

   a) il valore di k tale che rappresenti una r retta passante per l'origine

   b) i valori di k tale che rappresenti una retta s perpendicolare ad r.

   Sia A il punto di s di ordinata 5 e O l'origine del sistema di riferimento,

   c) determinare per quali valori di k l'equazione assegnata rappresenta rette che intersecano il segmento OA

1. **[3,5]**

a) Si determini l'equazione della parabola γ avente vertice in $V(-2;1)$ e come direttrice la retta di equazione $y = \frac{5}{4}$.

b) Avendo ottenuto al punto precedente che la parabola è descritta dall'equazione $y = -x^2 - 4x - 3$ si determinino l'equazione dell'asse di simmetria, le intersezioni con gli assi cartesiani e si rappresenti la parabola γ.

c) Si consideri il punto $L(-1;4)$ e si trovino le equazioni delle rette tangenti t_1 e t_2 condotte da L alla parabola γ; si determinino anche le coordinate dei punti di tangenza T_1 e T_2 .

d) Si individuino, se esistono, i punti P sulla parabola γ tali che l'area del triangolo T_1PT_2 valga 10.

e) Si scriva l'equazione della curva simmetrica alla parabola rispetto alla bisettrice del primo-terzo quadrante.

3. **[2]** Nel piano, riferiti ad un sistema monometrico di assi cartesiani xOy, sono assegnati i punti $A(0,2)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$; determinare

   a) L'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo AOB

   b) L'equazione dell'affinità α che ha come punti uniti O, C e trasforma il punto B nel punto A.

   c) L'area del triangolo CAA', dove A' è il trasformato di A nell'affinità α.

   d) Le rette che corrispondono agli assi cartesiani e alla bisettrice del secondo-quarto quadrante, nella trasformazione.

4. **[1,5]** Si disegnino le seguenti curve, deducendole dai grafici di funzioni note:

   $x = 2\sqrt{3-y^2} + 1, \quad y = 3 - \sqrt{-x^2+9}, \quad y = \frac{|x-2|}{2x+3}$

Prova di verifica del profilo di uscita e/o dei livelli minimi relativi alle classi 4 dell'internazionale Francese–Tedesco ad indirizzo scientifico ed I.G.C.S.E.

tempo della prova 3 ore

Entro parentesi quadra il punteggio massimo assegnato ad ogni esercizio.
Il punteggio di 6/10 indica il raggiungimento dei livelli minimi.

1) **[3,5]** Data la semicirconferenza di centro O e raggio unitario, prolunga il diametro AB di un segmento $\overline{BC} = 1$ e congiungi il punto C con i punti P e Q della circonferenza tali che $C\hat{O}Q = 2 \cdot C\hat{O}P$.

- **a)** Indicato con x l'angolo $C\hat{O}P$, determina l'espressione della funzione $f(x) = \frac{\overline{QC}^2 - \overline{PC}^2}{2 \cdot \overline{QP}^2}$
- **b)** Mostra i passaggi che permettono di trascrivere la funzione $f(x)$ nella forma $\frac{-2cos^2x + cosx + 1}{1 - cosx}$
- **c)** Indipendentemente dai limiti imposti alla variabile x dal problema geometrico, determina il dominio della $f(x)$, le sue intersezioni con gli assi cartesiani e studiane il segno. Riporta le informazioni in un sistema di riferimento cartesiano xOy.

2) **[1,5]** E' assegnata la funzione $f(x) = \frac{ln^2x - lnx}{ln\sqrt{x-1}}$

- a) determinane il dominio
- b) determinane le intersezioni con gli assi cartesiani
- c) studia il suo segno
- d) riporta le informazioni in un sistema di riferimento cartesiano xOy.

3) **[1]** La popolazione di uno stato nel 1980 era di 8 milioni di persone. Tale popolazione è cresciuta ogni anno del 3% per 30 anni secondo una legge $N(t) = N_0 e^{kt}$ dove N_0 è la popolazione iniziale e k è un coefficiente detto coefficiente di crescita.

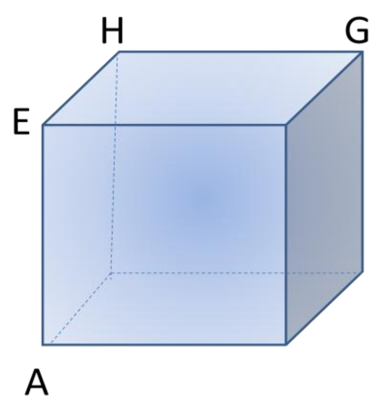
- a) Calcola il valore di k.
- b) Determina la popolazione nel 2010.
- c) Calcola il tempo necessario per il raddoppio della popolazione.

4) **[0,5]** Quale è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi contemporaneamente?
Se i lanci vengono ripetuti quale è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E quale quella di averne almeno due in sei lanci?

5) **[0,5]** Verifica la seguente identità: $n^2(n-2)! = n! + n(n-2)!$

6) **[2]** Considera il cubo rappresentato in figura in cui M e N sono rispettivamente i punti medi di AE e GH. La diagonale del cubo misura $a\sqrt{12}$.

- a) Determina la misura del lato del cubo.
- b) Determina l'area del triangolo AMN.
- c) Determina la distanza di M da N.
- d) Determina l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{M}N$



7) **[1]** Considera i due numeri complessi $w_1 = i^{12}$ e $w_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{14}$.

- a) Scrivi w_1 e w_2 in forma algebrica

b) Determina le radici quadrate complesse di w_1 e w_2.